

## BAB III

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas konstruksi dan analisis dinamik model *predator-prey* pada kasus *intraguild predation* dengan fungsi respon Holling Tipe II. Analisis dinamik pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, eksistensi dan kestabilannya serta syarat terjadinya bifurkasi Hopf. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis yang telah dilakukan.

#### 3.1 Konstruksi Model

Pada subbab ini dikonstruksi model *predator-prey* pada kasus *intraguild predation* yang merupakan modifikasi dari model (2.25). Perubahan yang dilakukan adalah dengan mengganti fungsi respon dari Holling tipe I menjadi Holling tipe II, yaitu  $F(X) = \frac{X}{m+X}$  agar diperoleh model yang lebih realistis. Model baru yang dihasilkan adalah

$$\frac{dX}{dt} = r_1 X \left(1 - \frac{X}{pZ}\right) - \frac{\alpha X}{m + X} Y, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dY}{dt} = r_2 Y \left(1 - \frac{Y}{qZ}\right) + \frac{\beta X}{m + X} Y, \quad (3.1b)$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z(\gamma - \delta X - \eta Y). \quad (3.1c)$$

Semua parameter bernilai positif dan populasi sumber biotik  $Z \neq 0$ . Parameter  $m$  adalah konstanta Menten yang menggambarkan proteksi lingkungan untuk menjaga keberlangsungan hidup *prey*. Parameter-parameter lainnya sama seperti pada sistem 2.25.

### 3.2 Titik Keseimbangan dan Syarat Eksistensi Model

Menurut definisi 2.2.1, titik keseimbangan model (3.1) diperoleh ketika

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt} = 0, \quad (3.2)$$

yaitu

$$X \left( r_1 - \frac{r_1 X}{pZ} - \frac{\alpha Y}{m + X} \right) = 0, \quad (3.3a)$$

$$Y \left( r_2 - \frac{r_2 Y}{qZ} + \frac{\beta X}{m + X} \right) = 0, \quad (3.3b)$$

$$Z(\gamma - \delta X - \eta Y) = 0; Z \neq 0. \quad (3.3c)$$

Berdasarkan persamaan (3.3a) diperoleh

$$X^* = 0, \quad (3.4)$$

atau

$$r_1 - \frac{r_1 X}{pZ} - \frac{\alpha Y}{m + X} = 0. \quad (3.5)$$

Sementara itu, dari persamaan (3.3b) diperoleh

$$Y^* = 0, \quad (3.6)$$

atau

$$r_2 - \frac{r_2 Y}{qZ} + \frac{\beta X}{m + X} = 0. \quad (3.7)$$

Dari persamaan (3.3c) diperoleh

$$\gamma - \delta X - \eta Y = 0. \quad (3.8)$$

#### Kasus 1.

Pada kasus ini ditinjau kombinasi persamaan (3.4), (3.7) dan (3.8), sehingga diperoleh titik keseimbangan  $E_1 = \left(0, \frac{\gamma}{\eta}, \frac{\gamma}{\eta q}\right)$ . Titik keseimbangan  $E_1$  adalah titik

kepunahan populasi *prey*. *Predator* bertahan hidup hanya dengan memangsa sumber biotik. Oleh karena elemennya bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $E_1 = \left(0, \frac{\gamma}{\eta}, \frac{\gamma}{\eta q}\right)$  selalu eksis.

### Kasus 2.

Ditinjau dari persamaan (3.5), (3.6) dan (3.8), diperoleh titik kesetimbangan  $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, 0, \frac{\gamma}{\delta p}\right)$ . Titik kesetimbangan  $E_2$  adalah titik kepunahan populasi *predator*.

*Prey* hidup tanpa adanya pemangsaan oleh *predator*. Oleh karena elemennya bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, 0, \frac{\gamma}{\delta p}\right)$  selalu eksis.

### Kasus 3.

Persamaan (3.8) dapat dinyatakan sebagai

$$Y^* = \frac{\gamma}{\eta} - \frac{\delta}{\eta} X^*. \quad (3.9)$$

Sementara itu, persamaan (3.5) dapat dinyatakan sebagai

$$Z^* = \frac{r_1 X^* (m + X^*)}{p r_1 (m + X^*) - \alpha p Y^*}, \quad (3.10)$$

dan dari persamaan (3.7) diperoleh

$$Z^* = \frac{r_2 Y^* (m + X^*)}{q r_2 (m + X^*) + \beta q X^*}. \quad (3.11)$$

Berdasarkan persamaan (3.10) dan (3.11) didapatkan

$$\frac{r_1 X^* (m + X^*)}{p r_1 (m + X^*) - \alpha p Y^*} = \frac{r_2 Y^* (m + X^*)}{q r_2 (m + X^*) + \beta q X^*}.$$

sehingga

$$m q r_1 r_2 X^* + q r_1 r_2 X^{*2} + \beta q r_1 X^{*2} = m p r_1 r_2 Y^* + p r_1 r_2 X^* Y^* - \alpha p r_2 Y^{*2}. \quad (3.12)$$

Susbstitusi persamaan (3.9) ke persamaan (3.12), menghasilkan

$$\begin{aligned}
& mqr_1r_2X^* + qr_1r_2X^{*2} + \beta qr_1X^{*2} \\
& = mpr_1r_2\left(\frac{\gamma}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}X^*\right) + pr_1r_2X^*\left(\frac{\gamma}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}X^*\right) - \alpha pr_2\left(\frac{\gamma}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}X^*\right)^2 \\
& mqr_1r_2X^* + qr_1r_2X^{*2} + \beta qr_1X^{*2} \\
& = \frac{\gamma mpr_1r_2}{\eta} - \frac{\delta mpr_1r_2}{\eta^2}X^* + \frac{\gamma pr_1r_2}{\eta}X^* - \frac{\delta pr_1r_2}{\eta}X^{*2} - \frac{\alpha\gamma^2pr_2}{\eta^2} \\
& \quad + \frac{\alpha\delta\gamma pr_2}{\eta^2}X^* - \frac{\alpha\delta^2pr_2}{\eta^2}X^{*2} \\
& mqr_1r_2X^* + qr_1r_2X^{*2} + \beta qr_1X^{*2} \\
& = \left(\frac{\gamma mpr_1r_2}{\eta} - \frac{\alpha\gamma^2pr_2}{\eta^2}\right) + \left(\frac{\gamma pr_1r_2}{\eta} - \frac{\delta mpr_1r_2}{\eta} + \frac{2\alpha\delta\gamma pr_2}{\eta^2}\right)X^* \\
& \quad - \left(\frac{\delta pr_1r_2}{\eta} + \frac{\delta\eta mpr_1r_2}{\eta^2}\right)X^{*2} \\
& \frac{\eta^2 mqr_1r_2}{\eta^2}X^* + \frac{\eta^2 qr_1r_2 + \beta\eta^2 qr_1}{\eta^2}X^{*2} \\
& = \frac{(\eta\gamma mpr_1r_2 - \alpha\gamma^2pr_2)}{\eta^2} + \frac{(\eta\gamma pr_1r_2 - \delta\eta mpr_1r_2 + 2\alpha\delta\gamma pr_2)}{\eta^2}X^* \\
& \quad - \frac{(\delta\eta pr_1r_2 + \delta\eta mpr_1r_2)}{\eta^2}X^{*2}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan sebelumnya, diperoleh persamaan kuadrat

$$AX^{*2} + BX^* + C = 0, \quad (3.13)$$

dengan

$$A = \delta\eta pr_1r_2 + \alpha\delta^2pr_2 + \eta^2 qr_1r_2 + \beta\eta^2 qr_1,$$

$$B = \eta^2 mqr_1r_2 + \delta\eta mpr_1r_2 - \eta\gamma pr_1r_2 - 2\alpha\delta\gamma pr_2,$$

$$C = \alpha\gamma^2pr_2 - \eta\gamma mpr_1r_2.$$

Akar-akar persamaan (3.13) adalah

$$X_{1,2}^* = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (3.14)$$

Titik kesetimbangan harus bernilai real positif, sehingga titik kesetimbangan interior model (3.1) dapat diklasifikasikan sebagai berikut.

- a. Jika  $C < 0$ , maka persamaan (3.13) memiliki satu akar positif, yaitu  $X_+^*$ , sehingga didapatkan satu titik kesetimbangan interior  $E_a^* = (X_+^*, Y^*, Z^*)$ . Koefisien  $C$  bernilai negatif jika  $r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} > 0$ .
- b. Jika  $B < 0$ ,  $C > 0$ , dan  $B^2 - 4AC > 0$ , maka persamaan (3.13) memiliki dua akar positif, yaitu  $X_+^*$  dan  $X_-^*$ . Akibatnya ada dua titik kesetimbangan interiornya yaitu  $E_a^* = (X_+^*, Y^*, Z^*)$  dan  $E_b^* = (X_-^*, Y^*, Z^*)$ . Koefisien  $B$  bernilai negatif jika  $\eta m q < \gamma p$  dan  $\eta m r_1 < 2\alpha\gamma$ .
- c. Jika  $B < 0$  dan  $B^2 - 4AC = 0$ , maka persamaan (3.13) memiliki satu akar positif, yaitu  $X^* = -\frac{B}{2A}$ . Terdapat satu titik kesetimbangan interior, yaitu  $E^* = (X^*, Y^*, Z^*)$ .

Berdasarkan persamaan (3.9),  $Y^*$  bernilai positif jika  $\frac{\gamma}{\eta} > \frac{\delta}{\eta} X^*$  dan berdasarkan persamaan (3.11),  $Z^*$  selalu bernilai positif apabila  $X^*$  dan  $Y^*$  bernilai positif. Titik kesetimbangan  $E^*$  disebut titik kesetimbangan interior, yaitu titik ketika kedua populasi, *prey* dan *predator*, hidup berdampingan dan berbagi sumber biotik yang sama.

### 3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Dari bagian sebelumnya diperoleh tiga jenis titik kesetimbangan, yaitu  $E_1 = \left(0, \frac{\gamma}{\eta}, \frac{\gamma}{\eta q}\right)$ ,  $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, 0, \frac{\gamma}{\delta p}\right)$ , dan  $E^* = (X^*, Y^*, Z^*)$ . Berdasarkan subbab 2.2.2,

analisis kestabilan titik kesetimbangan model (3.1) dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi. Matriks Jacobi model (3.1) adalah

$$J = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1X}{pZ} - \frac{\alpha Y}{m+X} + \frac{\alpha XY}{(m+X)^2} & -\frac{\alpha X}{m+X} & \frac{r_1 X^2}{pZ^2} \\ \frac{\beta Y}{m+X} - \frac{\beta XY}{(m+X)^2} & r_2 - \frac{2r_2Y}{qZ} + \frac{\beta X}{m+X} & \frac{r_2 Y^2}{qZ^2} \\ -Z\delta & -Z\eta & -\delta X - \eta Y + \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

### 3.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1$

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $E_1$  adalah

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{\alpha\gamma}{m\eta} & 0 & 0 \\ \frac{\beta\gamma}{m\eta} & -r_2 & r_2q \\ -\frac{\gamma\delta}{\eta q} & -\frac{\gamma}{q} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Persamaan karakteristik matriks (3.16) adalah

$$\left(r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} - \lambda\right)(r_2\lambda + \lambda^2 + \gamma r_2) = 0, \quad (3.17)$$

sehingga nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m},$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}r_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{r_2^2 - 4\gamma r_2}.$$

Diketahui bahwa semua parameter bernilai positif. Karena bagian real  $\lambda_{2,3}$  selalu bernilai negatif, maka titik  $E_1$  bersifat stabil asimtotik lokal jika

$$\lambda_1 = r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} < 0.$$

### 3.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_2$

Matriks Jacobi di titik keseimbangan  $E_2$  adalah

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -r_1 & -\frac{\alpha\gamma}{\delta m + \gamma} & r_1 p \\ 0 & r_2 + \frac{\beta\gamma}{\delta m + \gamma} & 0 \\ -\frac{\gamma}{p} & -\frac{\gamma\eta}{\delta p} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Persamaan karakteristik matriks (3.18) adalah

$$-\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda - k_3 = 0, \quad (3.19)$$

dengan  $k_1 = \frac{\beta\gamma}{\delta m + \gamma} - r_1 r_2$ ,  $k_2 = \frac{\beta\gamma r_1}{\delta m + \gamma} + r_1 r_2 + \gamma r_1$ , dan  $k_3 = \gamma r_1 r_2 + \frac{\beta\gamma^2 r_1}{\delta m + \gamma}$ .

Persamaan (3.19) dapat diuraikan menjadi

$$\left(\lambda - r_2 - \frac{\beta\gamma}{\delta m + \gamma}\right)(-\lambda^2 - r_1\lambda + \gamma r_1) = 0,$$

sehingga nilai-nilai eigen matriks (3.18) adalah

$$\lambda_1 = r_2 + \frac{\beta\gamma}{\delta m + \gamma} > 0,$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}r_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 - 4\gamma r_1} < 0.$$

Oleh karena salah satu nilai eigen matriks (3.18) yaitu  $\lambda_1 > 0$ , titik  $E_2$  bersifat tidak stabil.

### 3.3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan $E^*$

Matriks Jacobi di titik keseimbangan interior  $E^*$  adalah

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & -\frac{\alpha X^*}{m + X^*} & \frac{r_1 X^{*2}}{pZ^{*2}} \\ a_{21} & a_{22} & \frac{r_2 Y^{*2}}{qZ^{*2}} \\ -\delta Z^* & -\eta Z^* & \gamma - \delta X^* - \eta Y^* \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_1 - \frac{2r_1 X^*}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{m + X^*} + \frac{\alpha X^* Y^*}{(m + X^*)^2}, \\ a_{21} &= \frac{\beta Y^*}{m + X^*} - \frac{\beta X^* Y^*}{(m + X^*)^2}, \\ a_{22} &= r_2 - \frac{2r_2 Y^*}{qZ^*} + \frac{\beta X^*}{m + X^*}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.5), (3.7), dan (3.9), matriks (3.20) dapat disederhanakan menjadi

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{r_1 X^*}{pZ^*} + \frac{\alpha X^* Y^*}{(m + X^*)^2} & -\frac{\alpha X^*}{m + X^*} & \frac{r_1 X^{*2}}{pZ^{*2}} \\ \frac{\beta Y^*}{m + X^*} - \frac{\beta X^* Y^*}{(m + X^*)^2} & -\frac{r_2 Y^*}{qZ^*} & \frac{r_2 Y^{*2}}{qZ^{*2}} \\ -\delta Z^* & -\eta Z^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Persamaan karakteristik matriks (3.21) adalah

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0. \quad (3.22)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_1 &= X^* \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m + X^*)^2} \right) + \frac{r_2 Y^*}{qZ^*}, \\ A_2 &= \frac{\alpha \beta X^* Y^*}{(m + X^*)^2} \left( 1 - \frac{X^*}{m + X^*} \right) + \frac{r_2 X^* Y^*}{qZ^*} \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m + X^*)^2} \right) + \frac{\delta r_1 X^{*2}}{pZ^*} + \frac{\eta r_2 Y^{*2}}{qZ^*}, \\ A_3 &= \frac{\delta r_2 X^* Y^*}{qZ^*} \left( \frac{r_1 X^*}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{m + X^*} \right) + \frac{\eta r_2 X^* Y^{*2}}{qZ^*} \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m + X^*)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\beta \eta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^* (m + X^*)} \left( 1 - \frac{X^*}{m + X^*} \right). \end{aligned}$$



Sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E^*$  dijelaskan pada Teorema 3.1 berikut ini

### Teorema 3.1

Titik kesetimbangan interior  $E^*$  pada sistem (3.1) stabil asimtotik jika memenuhi kondisi berikut

- (1)  $\frac{r_1}{pZ^*} > \frac{2\alpha Y^*}{(m+X^*)^2},$
- (2)  $\frac{r_1 X^*}{pZ^*} > \frac{\alpha Y^*}{m+X^*},$
- (3)  $\frac{r_2 Y^*}{qZ^*} > \beta,$
- (4)  $\alpha \delta p r_2 Y^* > \beta \eta q r_1 X^*.$

Bukti:

Dengan menggunakan kondisi (1), jelas bahwa  $\frac{r_1}{pZ^*} > \frac{2\alpha Y^*}{(m+X^*)^2} > \frac{\alpha Y^*}{(m+X^*)^2}$  sehingga

$$A_1 = X^* \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m+X^*)^2} \right) + \frac{r_2 Y^*}{qZ^*} > 0, \text{ dan}$$

$$A_2 = \frac{\alpha \beta X^* Y^*}{(m+X^*)^2} \left( 1 - \frac{X^*}{m+X^*} \right) + \frac{r_2 X^* Y^*}{qZ^*} \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m+X^*)^2} \right) + \frac{\delta r_1 X^{*2}}{pZ^*} + \frac{\eta r_2 Y^{*2}}{qZ^*} > 0.$$

Dengan menggunakan kondisi (1) dan (2), jelas bahwa

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\delta r_2 X^* Y^*}{qZ^*} \left( \frac{r_1 X^*}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{m+X^*} \right) + \frac{\eta r_2 X^* Y^{*2}}{qZ^*} \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m+X^*)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\beta \eta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^* (m+X^*)} \left( 1 - \frac{X^*}{m+X^*} \right) > 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan kondisi (1), (2), (3), dan (4), diperoleh pula

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 &= \frac{\alpha^2 X^{*2} Y^{*2}}{(m+X^*)^4} \left( \frac{r_2 Y^*}{qZ^*} - \beta \right) + \frac{\eta r_2^2 Y^{*3}}{q^2 Y^{*2}} + \frac{\alpha^2 \beta X^{*3} Y^{*2}}{(m+X^*)^5} + \frac{\beta \eta r_1 X^{*3} Y^*}{pZ^* (m+X^*)^2} \\ &\quad + \left( \frac{\alpha \beta r_2 X^* Y^{*2}}{qZ^* (m+X^*)^2} + \frac{\alpha \beta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^* (m+X^*)^2} \right) \left( 1 - \frac{X^*}{m+X^*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r_1 r_2 X^{*2} Y^*}{p q Z^{*2}} \left( \frac{r_1}{p Z^*} - \frac{2 \alpha Y^*}{(m + X^*)^2} \right) + \frac{X^* Y^*}{Z^* (m + X^*)} \left( \frac{\alpha \delta r_2 Y^*}{q} - \frac{\beta \eta r_1 X^*}{p} \right) \\
& + \left( \frac{\delta r_1 X^{*3}}{p Z^*} + \frac{r_2^2 X^* Y^{*2}}{q^2 Z^{*2}} \right) \left( \frac{r_1}{p Z^*} - \frac{\alpha Y^*}{(m + X^*)^2} \right) > 0.
\end{aligned}$$

Karena  $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$ , dan  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ , berdasarkan kriteria Routh-Hourwitz pada Teorema 2.3, titik kesetimbangan interior  $E^*$  bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi (1)-(4). ■

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, eksistensi titik kesetimbangan dan analisis kestabilan model (3.1) disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_1 = \left(0, \frac{\gamma}{\eta}, \frac{\gamma}{\eta q}\right)$	—	Stabil Asimtotik	$r_1 - \frac{\alpha \gamma}{\eta m} < 0$
$E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, 0, \frac{\gamma}{\delta p}\right)$	—	Tidak Stabil	—
$E_a^* = (X_+^*, Y^*, Z^*)$	$C < 0$	Stabil Asimtotik	$\frac{r_1}{p Z^*} > \frac{2 \alpha Y^*}{(m + X^*)^2},$ $\frac{r_1 X^*}{p Z^*} > \frac{\alpha Y^*}{m + X^*},$ $\frac{r_2 Y^*}{q Z^*} > \beta,$ $\alpha \delta p r_2 Y^* > \beta \eta q r_1 X^*.$
$E_{a,b}^* = (X_{\pm}^*, Y^*, Z^*)$	$B < 0, C > 0$ , dan $B^2 - 4AC > 0$		
$E^* = (X^*, Y^*, Z^*)$	$B < 0$ dan $B^2 - 4AC = 0$		

Pada Tabel 3.1 syarat eksistensi titik  $E_a^*$  adalah  $C < 0$ , yaitu ketika  $r_1 - \frac{\alpha \gamma}{\eta m} > 0$ , artinya titik  $E_a^*$  eksis apabila titik kesetimbangan  $E_1$  tidak stabil. Sementara itu, ketika  $C > 0$ , yaitu ketika  $r_1 - \frac{\alpha \gamma}{\eta m} < 0$ , titik kesetimbangan interior yang mungkin

eksis adalah  $E_{a,b}^*$  atau  $E^*$ . Oleh karena itu, ketika  $E_{a,b}^*$  atau  $E^*$  eksis, terdapat kemungkinan sistem yang memiliki dua titik kesetimbangan yang stabil atau disebut sistem yang memiliki kestabilan ganda.

### 3.4 Bifurkasi Hopf

Selanjutnya dikaji kemungkinan terjadinya bifurkasi Hopf di titik kesetimbangan interior  $E^*$  dengan parameter bifurkasi  $\alpha$ .

#### Teorema 3.2

Terjadi bifurkasi Hopf pada titik kesetimbangan  $E^*$  jika terdapat  $\alpha = \alpha_0$  yang memenuhi

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{r_1}{pZ^*} > \frac{\alpha_0 Y^*}{(m+X^*)^2}, \\
 (2) \quad & \left( \frac{r_2 X^{*2} Y^{*3}}{qZ^*(m+X^*)^4} + \frac{\beta X^{*2} Y^{*2}}{(m+X^*)^4} \left( \frac{X^*}{m+X^*} - 1 \right) \right) \alpha_0^2 + \left( \left( \frac{\beta r_2 X^* Y^{*2}}{qZ^*(m+X^*)^2} + \frac{\beta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^*(m+X^*)^2} \right) \left( 1 - \frac{X^*}{m+X^*} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{\delta r_2 X^* Y^{*2}}{qZ^*(m+X^*)} - \frac{2r_1 r_2 X^{*2} Y^{*2}}{pqZ^{*2}(m+X^*)^2} - \frac{\delta r_1 X^{*3} Y^*}{pZ^*(m+X^*)^2} - \frac{r_2^2 X^* Y^{*3}}{q^2 Z^{*2}(m+X^*)^2} \right) \alpha_0 + \frac{\beta \eta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^*(m+X^*)} \left( \frac{X^*}{m+X^*} - 1 \right) + \\
 & \frac{\eta r_2^2 Y^{*3}}{q^2 Y^{*2}} + \frac{r_1^2 r_2 X^{*2} Y^*}{p^2 q Z^{*3}} + \frac{\delta r_1^2 X^{*3}}{p^2 Z^{*2}} + \frac{r_1 r_2^2 X^* Y^{*2}}{pq^2 Z^{*3}} = 0, \\
 (3) \quad & A_3'(\alpha_0) - (A_1(\alpha_0)A_2'(\alpha_0) + A_2(\alpha_0)A_1'(\alpha_0)) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.4, syarat perlu dan cukup terjadinya bifurkasi Hopf adalah

- (1)  $A_j(\alpha_0) > 0, \forall j = 1, 2,$
- (2)  $A_1(\alpha_0)A_2(\alpha_0) - A_3(\alpha_0) = 0$ , dan
- (3) Jika nilai eigen dari persamaan karakteristik berbentuk  $\lambda_j = a \pm ib$ , maka

$$Re \left\{ \frac{d}{d\alpha} \lambda_j \right\} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0, \forall j = 1, 2.$$

Diketahui bahwa

$$A_1(\alpha_0) = X^* \left( \frac{r_1}{pZ^*} - \frac{\alpha_0 Y^*}{(m+X^*)^2} \right) + \frac{r_2 Y^*}{qZ^*},$$

$$A_2(\alpha_0) = \frac{\alpha_0 \beta X^* Y^*}{(m + X^*)^2} \left(1 - \frac{X^*}{m + X^*}\right) + \frac{r_2 X^* Y^*}{q Z^*} \left(\frac{r_1}{p Z^*} - \frac{\alpha_0 Y^*}{(m + X^*)^2}\right) + \frac{\delta r_1 X^{*2}}{p Z^*} + \frac{\eta r_2 Y^{*2}}{q Z^*},$$

Nilai  $A_1(\alpha_0)$  dan  $A_2(\alpha_0)$  akan bernilai positif jika memenuhi kondisi (1). Kondisi

$A_1(\alpha_0)A_2(\alpha_0) - A_3(\alpha_0) = 0$  diberikan sebagai

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_0^2 X^{*2} Y^{*2}}{(m + X^*)^4} \left(\frac{r_2 Y^*}{q Z^*} - \beta\right) + \frac{\eta r_2^2 Y^{*3}}{q^2 Y^{*2}} + \frac{\alpha_0^2 \beta X^{*3} Y^{*2}}{(m + X^*)^5} + \frac{\beta \eta r_1 X^{*3} Y^*}{p Z^* (m + X^*)^2} \\ & + \left(\frac{\alpha_0 \beta r_2 X^* Y^{*2}}{q Z^* (m + X^*)^2} + \frac{\alpha_0 \beta r_1 X^{*2} Y^*}{p Z^* (m + X^*)^2}\right) \left(1 - \frac{X^*}{m + X^*}\right) + \frac{r_1 r_2 X^{*2} Y^*}{p q Z^{*2}} \left(\frac{r_1}{p Z^*} - \frac{2 \alpha_0 Y^*}{(m + X^*)^2}\right) \\ & + \frac{X^* Y^*}{Z^* (m + X^*)} \left(\frac{\alpha_0 \delta r_2 Y^*}{q} - \frac{\beta \eta r_1 X^*}{p}\right) + \left(\frac{\delta r_1 X^{*3}}{p Z^*} + \frac{r_2^2 X^* Y^{*2}}{q^2 Z^{*2}}\right) \left(\frac{r_1}{p Z^*} - \frac{\alpha_0 Y^*}{(m + X^*)^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

atau dapat disajikan menjadi

$$F \alpha_0^2 + G \alpha_0 + H = 0,$$

dengan

$$\begin{aligned} F &= \frac{r_2 X^{*2} Y^{*3}}{q Z^* (m + X^*)^4} + \frac{\beta X^{*2} Y^{*2}}{(m + X^*)^4} \left(\frac{X^*}{m + X^*} - 1\right), \\ G &= \left(\frac{\beta r_2 X^* Y^{*2}}{q Z^* (m + X^*)^2} + \frac{\beta r_1 X^{*2} Y^*}{p Z^* (m + X^*)^2}\right) \left(1 - \frac{X^*}{m + X^*}\right) + \frac{\delta r_2 X^* Y^{*2}}{q Z^* (m + X^*)} \\ & - \frac{2 r_1 r_2 X^{*2} Y^{*2}}{p q Z^{*2} (m + X^*)^2} - \frac{\delta r_1 X^{*3} Y^*}{p Z^* (m + X^*)^2} - \frac{r_2^2 X^* Y^{*3}}{q^2 Z^{*2} (m + X^*)^2}, \\ H &= \frac{\beta \eta r_1 X^{*2} Y^*}{p Z^* (m + X^*)} \left(\frac{X^*}{m + X^*} - 1\right) + \frac{\eta r_2^2 Y^{*3}}{q^2 Y^{*2}} + \frac{r_1^2 r_2 X^{*2} Y^*}{p^2 q Z^{*3}} + \frac{\delta r_1^2 X^{*3}}{p^2 Z^{*2}} + \frac{r_1 r_2^2 X^* Y^{*2}}{p q^2 Z^{*3}}. \end{aligned}$$

Diasumsikan terdapat  $\alpha_0$  yang memenuhi kondisi (2), sehingga

$$A_1 A_2 = A_3. \quad (3.23)$$

Berdasarkan persamaan (3.23), persamaan karakteristik (3.22) dapat dinyatakan dengan

$$(\lambda^2 + A_2)(\lambda + A_1) = 0. \quad (3.24)$$

Akar-akar persamaan karakteristik (3.24) adalah

$$\lambda_{1,2}(\alpha_0) = \pm i\sqrt{A_2}, \lambda_3(\alpha_0) = -A_1.$$

Untuk setiap  $\alpha$ , maka akar-akar persamaan karakteristik secara umum berbentuk

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = a(\alpha) \pm ib(\alpha),$$

$$\lambda_3(\alpha) = -A_1(\alpha).$$

Untuk membuktikan kondisi (3), substitusi  $\lambda_1(\alpha) = a(\alpha) + ib(\alpha)$  ke persamaan (3.24) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \left( (a(\alpha) + ib(\alpha))^2 + A_2 \right) (a(\alpha) + ib(\alpha) + A_1(\alpha)) \\ &= (a^2(\alpha) + 2ia(\alpha)b(\alpha) - b^2(\alpha) + A_2(\alpha)) (a(\alpha) + ib(\alpha) + A_1(\alpha)) \\ &= a^3(\alpha) + ia^2(\alpha)b(\alpha) + a^2(\alpha)A_1(\alpha) + 2ia^2(\alpha)b(\alpha) - 2a(\alpha)b^2(\alpha) \\ &\quad + 2ia(\alpha)b(\alpha)A_1(\alpha) - a(\alpha)b^2(\alpha) - ib^3(\alpha) - b^2(\alpha)A_1(\alpha) + a(\alpha)A_2(\alpha) \\ &\quad + ib(\alpha)A_2(\alpha) + A_1(\alpha)A_2(\alpha) \\ &= \xi_1 + i\xi_2, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a^3(\alpha) + a^2(\alpha)A_1(\alpha) - 3a(\alpha)b^2(\alpha) - b^2(\alpha)A_1(\alpha) + a(\alpha)A_2(\alpha) \\ &\quad + A_1(\alpha)A_2(\alpha), \end{aligned}$$

$$\xi_2 = 3a^2(\alpha)b(\alpha) + 2a(\alpha)b(\alpha)A_1(\alpha) - b^3(\alpha) + b(\alpha)A_2(\alpha).$$

Supaya persamaan (3.24) terpenuhi, maka  $\xi_1 = 0$  dan  $\xi_2 = 0$ . Turunkan  $\xi_1$  dan  $\xi_2$  terhadap  $\alpha$ , sehingga didapatkan

$$\frac{d\xi_1}{d\alpha} = P(\alpha)a'(\alpha) - Q(\alpha)b'(\alpha) + R(\alpha) = 0, \quad (3.25a)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\alpha} = Q(\alpha)a'(\alpha) + P(\alpha)b'(\alpha) + S(\alpha) = 0. \quad (3.25b)$$

dengan

$$P(\alpha) = 3a^2(\alpha) + 2a(\alpha)A_1(\alpha) - 3b^2(\alpha) + A_2(\alpha),$$

$$Q(\alpha) = 6a(\alpha)b(\alpha) + 2b(\alpha)A_1(\alpha),$$

$$R(\alpha) = a^2(\alpha)A_1'(\alpha) - b^2(\alpha)A_1'(\alpha) + a(\alpha)A_2'(\alpha) + A_3'(\alpha),$$

$$S(\alpha) = 2a(\alpha)b(\alpha)A_1'(\alpha) + b(\alpha)A_2'(\alpha).$$

Kalikan persamaan (3.25a) dengan  $P(\alpha)$  dan persamaan (3.25b) dengan  $Q(\alpha)$ .

Jumlahkan kedua persamaan tersebut sehingga diperoleh

$$P^2(\alpha)a'(\alpha) + Q^2(\alpha)a'(\alpha) + P(\alpha)R(\alpha) + Q(\alpha)S(\alpha). \quad (3.26)$$

Dari persamaan (3.26) dihasilkan

$$a'(\alpha) = -\frac{P(\alpha)R(\alpha) + Q(\alpha)S(\alpha)}{P^2(\alpha) + Q^2(\alpha)}. \quad (3.27)$$

Dengan mengganti nilai  $\alpha$  menjadi  $\alpha_0$  serta mensubstitusi  $a(\alpha_0) = 0$  dan

$b(\alpha_0) = \sqrt{A_2}(\alpha_0)$  pada persamaan  $P(\alpha)$ ,  $Q(\alpha)$ ,  $R(\alpha)$ , dan  $S(\alpha)$  didapat

$$P(\alpha_0) = -2A_2(\alpha_0),$$

$$Q(\alpha_0) = 2\sqrt{A_2}(\alpha_0)A_1(\alpha_0),$$

$$R(\alpha_0) = -A_2(\alpha_0)A_1'(\alpha_0) + A_3'(\alpha_0),$$

$$S(\alpha_0) = \sqrt{A_2}(\alpha_0)A_2'(\alpha_0),$$

sehingga

$$a'(\alpha_0) = \frac{A_3'(\alpha_0) - (A_1(\alpha_0)A_2'(\alpha_0) + A_2(\alpha_0)A_1'(\alpha_0))}{2(A_2(\alpha_0) + A_1^2(\alpha_0))}. \quad (3.28)$$

Jika

$$A_3'(\alpha_0) - (A_1(\alpha_0)A_2'(\alpha_0) + A_2(\alpha_0)A_1'(\alpha_0)) \neq 0,$$

maka

$$Re \left\{ \frac{d}{d\alpha} \lambda_{1,2}(\alpha) \right\} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = a'(\alpha_0) \neq 0.$$

Dengan demikian, kondisi (3) untuk nilai eigen  $\lambda_{1,2}(\alpha)$  terpenuhi.

■

Berdasarkan Teorema 3.2, ketika tingkat pemangsaan  $\alpha$  melewati suatu nilai kritis maka sistem (3.1) mengalami bifurkasi Hopf di sekitar titik kesetimbangan interior  $E^*$ . Terjadinya bifurkasi Hopf di sekitar titik kesetimbangan interior menunjukkan adanya keseimbangan ekosistem. *Predator*, *prey* dan sumber biotik dapat hidup berdampingan dengan kepadatan populasi yang berubah-ubah setiap waktu.

### 3.5 Simulasi Numerik

Untuk mengkonfirmasi hasil analisis yang telah diberikan pada subbab sebelumnya, dilakukan simulasi numerik sehingga perilaku solusi sistem (3.1) dapat digambarkan secara grafis. Simulasi numerik ini dilakukan dengan metode *Runge-Kutta* orde empat dengan menggunakan program Matlab. Pada simulasi 1 sampai 4 dilakukan variasi terhadap tingkat pemangsaan *prey* oleh *predator* untuk melihat perubahan perilaku solusi. Sementara itu, pada simulasi 5 diberikan nilai-nilai parameter yang menjadikan sistem memiliki kestabilan ganda.

#### 3.5.1 Simulasi 1

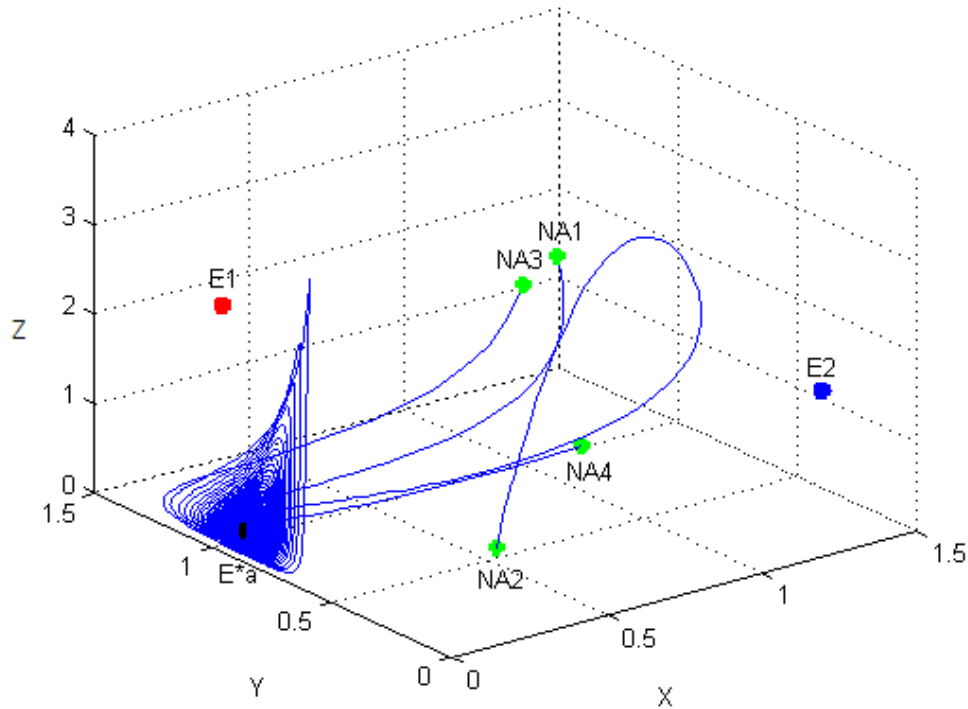
Pada simulasi 1 digunakan nilai-nilai parameter  $r_1 = 1, r_2 = 0.003, \beta = 0.6, p = 0.65, q = 0.35, \gamma = 2.4, \delta = 2, \eta = 2.5, m = 0.88$  dan  $\alpha = 0.7$ . Ada tiga titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1 = (0, 0.96, 2.742857143)$ ,  $E_2 = (1.2, 0, 1.846153846)$ , dan  $E_a^* = (0.0468, 0.9226, 0.2375)$ . Titik kesetimbangan interior  $E_a^*$  eksis karena memenuhi syarat

$$B = -0.010449 < 0,$$

$$C = -0.0024336 < 0,$$

$$B^2 - 4AC = 0.01309752382 > 0.$$

Nilai-nilai awal yang digunakan yaitu  $NA1 = (0.8, 0.6, 3), NA2 = (0.3, 0.2, 0.7), NA3 = (1, 1, 2)$ , dan  $NA4 = (1, 0.75, 0.5)$ . Perilaku solusi sistem (3.1) dengan nilai-nilai parameter tersebut secara grafis dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Potret fase sistem (3.1) yang menunjukkan eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan  $E_a^*$  ketika  $\alpha = 0.7$

Titik kesetimbangan  $E_1$  dan  $E_2$  bersifat tidak stabil, sedangkan titik  $E_a^*$  bersifat stabil karena solusi sistem konvergen ke titik tersebut. Dengan tingkat pemangsaan  $\alpha = 0.7$ , populasi *prey* memiliki waktu untuk pulih sehingga ketiga populasi dapat hidup berdampingan. Setelah beberapa waktu, populasi ketiga spesies tidak mengalami perubahan sehingga kepadatan ketiganya tetap.

### 3.5.2 Simulasi 2

Dengan menggunakan nilai-nilai parameter  $r_1 = 1, r_2 = 0.003, \beta = 0.6, p = 0.65, q = 0.35, \gamma = 2.4, \delta = 2, \eta = 2.5$ , dan  $m = 0.88$  untuk menyelesaikan persamaan  $A_1(\alpha_0)A_2(\alpha_0) - A_3(\alpha_0) = 0$ , maka diperoleh  $\alpha_{01} = 0.7416107842$  dan  $\alpha_{02} = 0.8756517187$ . Berdasarkan Teorema 3.2, terjadi bifurkasi Hopf di sekitar



titik kesetimbangan interior dengan nilai kritis  $\alpha_0$  apabila memenuhi kondisi berikut

$$1. \frac{r_1}{pZ^*} > \frac{\alpha_0 Y^*}{(m+X^*)^2}.$$

Kondisi ini terpenuhi, karena untuk  $\alpha_{01} = 0.7416107842$

$$\frac{r_1}{pZ^*} = 5.979480704 \text{ dan } \frac{\alpha_0 Y^*}{(m+X^*)^2} = 0.8061827858.$$

Sementara itu, untuk  $\alpha_{02} = 0.8756517187$

$$\frac{r_1}{pZ^*} = 3.66353735 \text{ dan } \frac{\alpha_0 Y^*}{(m+X^*)^2} = 1.006797907.$$

$$2. \left( \frac{r_2 X^{*2} Y^{*3}}{qZ^*(m+X^*)^4} + \frac{\beta X^{*2} Y^{*2}}{(m+X^*)^4} \left( \frac{X^*}{m+X^*} - 1 \right) \right) \alpha_0^2 + \left( \left( \frac{\beta r_2 X^{*2} Y^{*2}}{qZ^*(m+X^*)^2} + \frac{\beta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^*(m+X^*)^2} \right) \left( 1 - \frac{X^*}{m+X^*} \right) + \right. \\ \left. \frac{\delta r_2 X^{*2} Y^{*2}}{qZ^*(m+X^*)} - \frac{2r_1 r_2 X^{*2} Y^{*2}}{pqZ^{*2}(m+X^*)^2} - \frac{\delta r_1 X^{*3} Y^*}{pZ^*(m+X^*)^2} - \frac{r_2^2 X^{*3} Y^{*3}}{q^2 Z^{*2}(m+X^*)^2} \right) \alpha_0 + \frac{\beta \eta r_1 X^{*2} Y^*}{pZ^*(m+X^*)} \left( \frac{X^*}{m+X^*} - 1 \right) + \\ \frac{\eta r_2^2 Y^{*3}}{q^2 Y^{*2}} + \frac{r_1^2 r_2 X^{*2} Y^*}{p^2 q Z^{*3}} + \frac{\delta r_1^2 X^{*3}}{p^2 Z^{*2}} + \frac{r_1 r_2^2 X^{*3} Y^{*2}}{p q^2 Z^{*3}} = 0.$$

Jelas bahwa kondisi ini terpenuhi.

$$3. A'_3(\alpha_0) - (A_1(\alpha_0)A'_2(\alpha_0) + A_2(\alpha_0)A'_1(\alpha_0)) \neq 0.$$

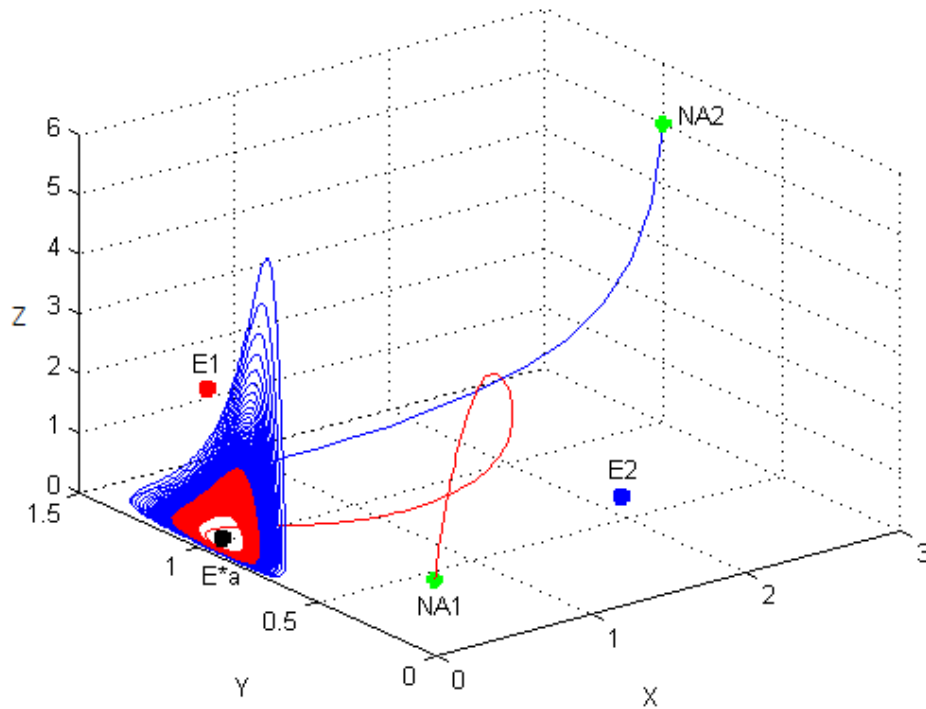
Kondisi ini terpenuhi, karena untuk  $\alpha_{01} = 0.7416107842$

$$A'_3(\alpha_0) - (A_1(\alpha_0)A'_2(\alpha_0) + A_2(\alpha_0)A'_1(\alpha_0)) = -0.00689626633,$$

dan untuk  $\alpha_{02} = 0.8756517187$

$$A'_3(\alpha_0) - (A_1(\alpha_0)A'_2(\alpha_0) + A_2(\alpha_0)A'_1(\alpha_0)) = -0.001746469527.$$

Apabila diambil nilai  $0.7416107842 < \alpha < 0.8756517187$ , yaitu  $\alpha = 0.76$ , maka terdapat satu titik kesetimbangan interior  $E_a^* = (0.0409, 0.9273, 0.2681)$ . Jika diberikan nilai awal  $NA1 = (0.3, 0.2, 0.7)$  dan  $NA2 = (3, 1, 5)$  perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan  $E_a^*$  diperlihatkan pada Gambar 3.2. Ada tiga titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1, E_2$  dan  $E_a^*$ . Muncul *limit cycle* yang stabil di sekitar titik  $E_a^*$ . Solusi sistem dengan nilai awal  $NA1$  dan  $NA2$  bergerak menuju ke *limit cycle*.



Gambar 3.2 Potret fase sistem (3.1) yang menunjukkan kemunculan *limit cycle* di sekitar titik kesetimbangan  $E_a^*$  ketika  $\alpha = 0.76$

Dengan nilai-nilai parameter tersebut, titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil karena

$$r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} = 0.1709090909 > 0.$$

Titik kesetimbangan  $E_2$  selalu tidak stabil. Sementara itu, karena

$$\frac{r_1 X^*}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{m + X^*} = -0.5305239765 < 0,$$

maka  $E_a^*$  tidak memenuhi salah satu kriteria kestabilan pada Teorema 3.1. Nilai-nilai eigen matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $E_a^*$  yaitu

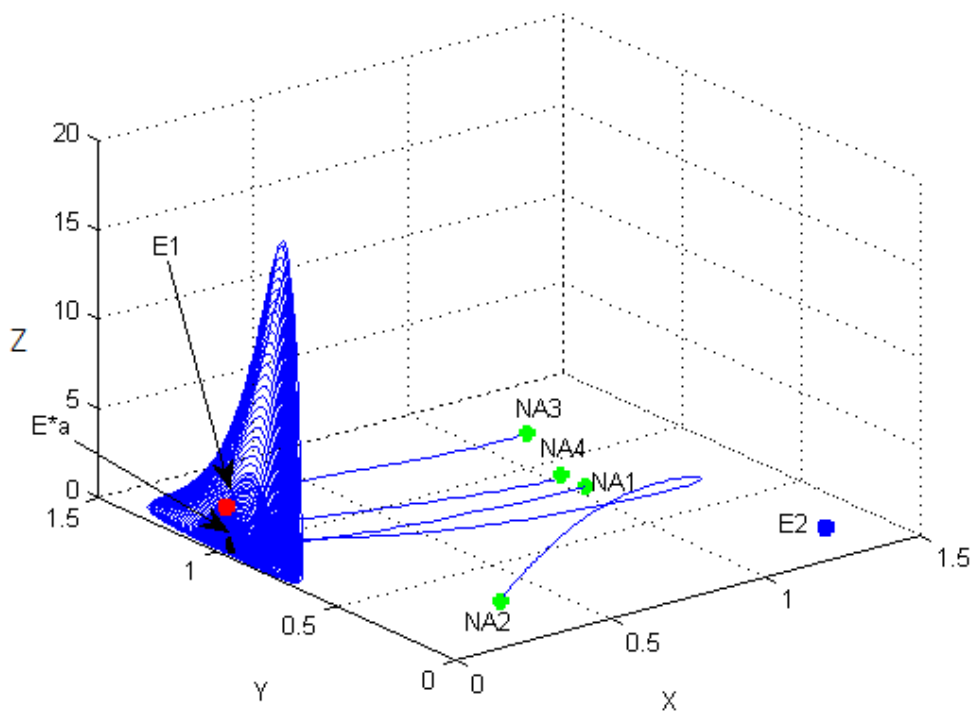
$$\lambda_1 = -0.231878105946144,$$

$$\lambda_{2,3} = 0.000740133043072078 \pm 0.337220813311586I.$$

Kemunculan *limit cycle* yang stabil setelah parameter bifurkasi melewati nilai kritis  $\alpha_{01}$  menandakan terjadinya bifurkasi Hopf *supercritical*. Populasi ketiga spesies berubah secara periodik, akibatnya terjadi keseimbangan ekosistem. Ketiga spesies dapat hidup berdampingan dengan populasi yang selalu berubah.

### 3.5.3 Simulasi 3

Berdasarkan pada simulasi 2, diperoleh nilai kritis  $\alpha_{01} = 0.7416107842$  dan  $\alpha_{02} = 0.8756517187$ . Pada simulasi 3 tingkat pemangsaan diperbesar sehingga lebih besar dari  $\alpha_{02}$ , yaitu  $\alpha = 0.91$ . Dengan menggunakan nilai-nilai awal  $NA1 = (0.8, 0.6, 3)$ ,  $NA2 = (0.3, 0.2, 0.7)$ ,  $NA3 = (1, 1, 2)$ , dan  $NA4 = (1, 0.75, 0.5)$ , perilaku solusi secara grafis dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Potret fase sistem (3.1) yang menunjukkan eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan  $E_a^*$  ketika  $\alpha = 0.91$

Ada tiga titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1 = (0, 0.96, 2.742857143)$ ,  $E_2 = (1.2, 0, 1.846153846)$ , dan  $E_a^* = (0.0146027703, 0.948317784, 0.6353363364)$ . Setelah tingkat pemangsaan  $\alpha$  melewati nilai kritis  $\alpha_{02} = 0.8756517187$ , *limit cycle* menghilang dan solusi sistem (3.1) konvergen ke titik kesetimbangan interior  $E_a^*$ . Setelah beberapa waktu, populasi ketiga spesies tidak mengalami perubahan sehingga kepadatan populasinya tetap. Nilai-nilai eigen matriks Jacobi di titik  $E_a^*$  adalah

$$\lambda_1 = -0.0259045438990698,$$

$$\lambda_{2,3} = -0.003251930200465009 \pm 0.2018160894360771i.$$

Titik kesetimbangan  $E_1$  tidak stabil karena  $r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} = 0.0072727273 > 0$ , sedangkan titik kesetimbangan  $E_2$  selalu tidak stabil.

#### 3.5.4 Simulasi 4

Apabila digunakan nilai-nilai parameter yang sama dengan simulasi 1 dan memperbesar tingkat pemangsaan oleh *predator* menjadi sebesar  $\alpha = 1$ , nilai-nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik  $E_1$  karena

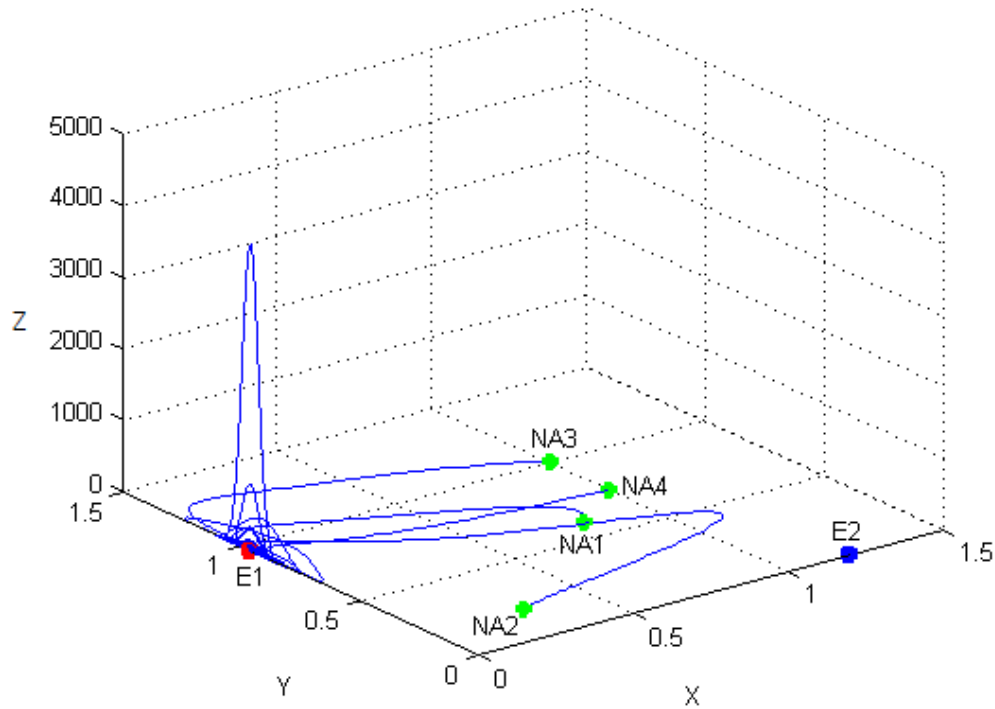
$$r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} = -0.090909091 < 0.$$

Titik kesetimbangan interior  $E^*$  tidak eksis karena

$$D = B^2 - 4AC = -0.004746192975 < 0.$$

Perilaku solusi pada sistem (3.1) dengan menggunakan nilai-nilai awal  $NA1 = (0.8, 0.6, 3)$ ,  $NA2 = (0.3, 0.2, 0.7)$ ,  $NA3 = (1, 1, 2)$ , dan  $NA4 = (1, 0.75, 0.5)$  secara grafis dapat dilihat pada Gambar 3.4. Pada Gambar 3.4 terlihat bahwa hanya ada dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik  $E_1 = (0, 0.96, 2.742857143)$  dan  $E_2 = (1.2, 0, 1.846153846)$ . Solusi sistem (3.1) konvergen ke titik  $E_1$ , akibatnya titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat stabil. Ketika nilai parameter  $\alpha = 1$ , populasi *prey* akan punah sedangkan populasi *predator* dapat

bertahan dengan memangsa sumber biotik. Besarnya tingkat pemangsaan menjadikan *prey* tidak memiliki waktu untuk meregenerasi populasinya sehingga populasi *prey* habis karena pemangsaan terus-menerus. Titik kesetimbangan  $E_2$  selalu bersifat tidak stabil.



Gambar 3.4 Potret fase sistem (3.1) yang menunjukkan kestabilan titik  $E_1$

### 3.5.5 Simulasi 5

Dengan menggunakan nilai-nilai parameter  $r_1 = 1.1, r_2 = 0.8, \alpha = 0.7, \beta = 0.5, p = 0.65, q = 0.35, \gamma = 3, \delta = 0.5, \eta = 0.4$ , dan  $m = 2.5$ , ada empat titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1 = (0.75, 21.4285714)$ ,  $E_2 = (6.0, 9.23076923)$ ,  $E_a^* = (2.9331, 3.8336, 8.1899)$  dan  $E_b^* = (1.8631, 5.1712, 11.6624)$ . Nilai-nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan  $E_1$  karena

$$r_1 - \frac{\alpha\gamma}{\eta m} = -1 < 0.$$

Selain itu, titik kesetimbangan  $E_a^*$  juga stabil karena memenuhi

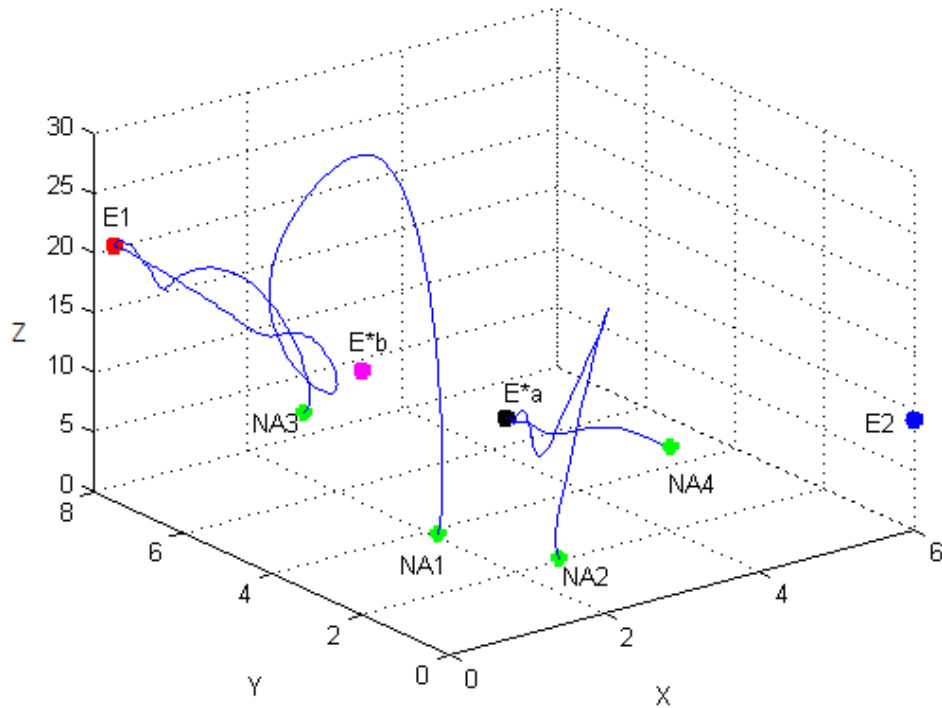
$$\frac{r_1}{pZ^*} - \frac{2\alpha Y^*}{(m + X^*)^2} = 0.0248144277 > 0,$$

$$\frac{r_1 X^*}{pZ^*} - \frac{\alpha Y^*}{m + X^*} = 0.112280098 > 0,$$

$$\frac{r_2 Y^*}{qZ^*} - \beta = 0.569917128 > 0,$$

$$\alpha \delta p r_2 Y^* - \beta \eta q r_1 X^* = 0.4718665 > 0.$$

Perilaku sistem (3.1) pada simulasi 5 dengan menggunakan nilai-nilai awal  $NA1 = (1,2,5)$ ,  $NA2 = (2,1,3)$ ,  $NA3 = (1,5,10)$ , dan  $NA4 = (4,2,7)$  secara grafis dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Potret fase sistem (3.1) yang menunjukkan sistem dengan kestabilan ganda

Pada Gambar 3.5, ketika menggunakan nilai awal  $NA1$  dan  $NA3$  solusi sistem konvergen ke titik kesetimbangan  $E_1$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat stabil. Ketika menggunakan nilai awal  $NA2$  dan  $NA4$  solusi sistem konvergen ke

titik kesetimbangan  $E_a^*$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_a^*$  bersifat stabil. Titik kesetimbangan  $E_2$  selalu tidak stabil, sedangkan titik  $E_b^*$  tidak stabil karena tidak memenuhi kriteria kestabilan titik kesetimbangan interior pada Teorema 3.1, yaitu

$$\frac{r_1}{pZ^*} - \frac{2\alpha Y^*}{(m + X^*)^2} = -0.235194361 < 0.$$

Sistem dengan kestabilan ganda (*bistable system*) mengindikasikan bahwa solusi sistem dipengaruhi oleh nilai awal ketiga populasi.